Statistik und Wahrscheinlichkeit

1) Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

− Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen A bis F dargestellt sind.

b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte

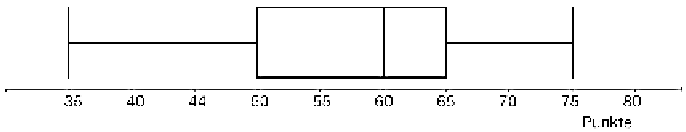
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

− Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.



− Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.

− Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

2) a) Eine Maschine stellt Schrauben her, deren Länge normalverteilt mit $\mu = 8{,}00$ cm und $\sigma = 0{,}15$ cm ist.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube kürzer als 7,94 cm ist?

ii) In welchem symmetrischen Bereich liegen 98% der erzeugten Schrauben?

b) Zur Probe werden 10 Schrauben untersucht und folgende Längen gemessen:

8,00 7,90 7,92 7,90 7,96 8,00 8,00 7,92 8,00 7,90

Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung.

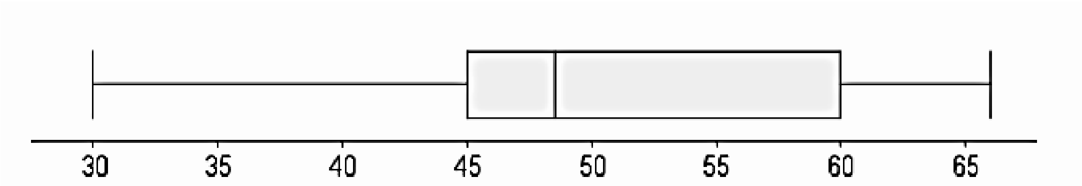
c) Es gibt Schrauben, deren Gewinde für Holz geeignet ist und Schrauben, deren Gewinde für Metall geeignet ist. Ein Hobbybastler hat eine Box, die sehr viele Schrauben enthält, und zwar 30% Holzschrauben und 70% Metallschrauben. Er braucht 4 Holzschrauben zur Befestigung einer Platte. Er nimmt dafür 10 Schrauben aus der Box.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 4 Holzschrauben erwischt?

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er 4 bis 7 Holzschrauben erwischt?

d) Warum dürfen Sie in Beispiel c) mit Binomialverteilung rechnen, obwohl die Schrauben nicht zurückgelegt werden?

3) a) In einem Wald wurden die Stammumfänge von 120 Bäumen vermessen (Umfang in cm). Die Daten sind hier in Form eines Diagramms dargestellt.



− Setzen Sie in folgenden Aussagen die richtigen Zahlen ein.

Aus dem Diagramm kann man entnehmen, dass

- ca. 75% der Bäume einen Stammumfang kleiner als ………… cm haben.
- alle Bäume einen Stammumfang von höchstens ………… cm haben.
- von den 120 Bäumen ca. ………… einen Stammumfang von höchstens 45 cm haben.
- ca. ………… Bäume einen Stammumfang von 45 cm bis 60 cm haben

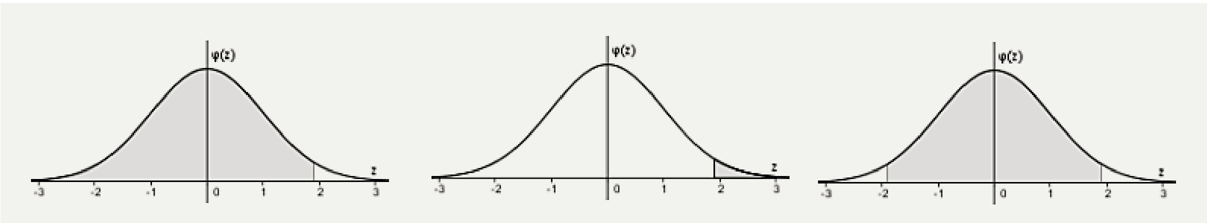
b) In einer Urne befinden sich 8 rote und 12 grüne Kugeln. Man darf dreimal ziehen mit Zurücklegen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...

- mindestens eine rote Kugel gezogen wird?
- genau eine rote Kugel gezogen wird?
- Geben Sie an, wie viele Züge man braucht, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen

c) In einem Land sind die Bruttogehälter der Menschen normalverteilt mit den Parametern μ = 2.200,- € und σ = 800,- €. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Bruttogehalt über 3.720,- € erhält.

- Welche der drei Grafiken stellt diese Wahrscheinlichkeit dar?
- Wie groß ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit?
- In welchem symmetrischen Intervall liegen 95 % aller Gehälter?



1 2 3

4) Bei einem Versand gibt es eine Knetmasse zu kaufen, die im Dunklen leuchtet. Sie wird in Dosen zu 80 g verkauft. Angenommen, das Füllgewicht der Dosen ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 3 g.

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dose weniger als 75 g enthält.

ii) Bestimmen Sie ein symmetrisches Intervall, in dem das Füllgewischt von 90 % aller Dosen liegt.

Insgesamt werden vom Versand 30 verschiedene Spiele zu folgenden Preisen angeboten:

Preis in €	4,95	8,95	14,95	19,90	29,90	39,90	49,00	79,00	89,00
Häufigkeit	1	4	6	4	5	5	3	1	1

iii) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, die Standardabweichung, den Median und die Quartile.

iv) Stellen Sie die Verteilung der Preise in einem Boxplot-Diagramm dar.

v) Erklären Sie, warum das arithmetische Mittel höher ist als der Median.

5) a) In Österreich gab es in den vergangenen Jahren die folgenden Geburtenzahlen (pro Tausend Personen in Jahresmitte):

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Geburten	9,9	9,74	9,58	9,43	8,9	8,81	8,74	8,69	8,66	8,65	8,65	8,67	8,69	8,73	8,76

i) Geben Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Zahlen an.
ii) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum und den Median der Daten

b) Zwei Schachspieler spielen 7 Partien gegeneinander. A ist der schwächere Spieler, seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 0,4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A

i) genau 3mal
ii) höchstens 3mal
iii) mindestens 2mal gewinnt?
iv) Wie oft müssten die Spieler Schach spielen, damit der schwächere Spieler mindestens einmal mit mindestens 95% gewinnt?

c) 7% aller Eier werden beim Transport beschädigt. Ein Geschäft bekommt eine Lieferung von 1500 Eiern.

i) Mit wie viel beschädigten Eiern müsste man bei dieser Lieferung durchschnittlich rechnen?
ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 120 oder mehr Eier beschädigt sind?
iii) In welchem symmetrischen Bereich liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der beschädigten Eier?

6) Die Schokoladefabrik „Supersüß“ stellt Schokoriegel und Pralinen her. Um den Verkauf der Riegel zu fördern, wird ein Werbegeschenk mit dem Slogan „ In jedem siebten Riegel liegt ein Zauberspiegel“ beigelegt.

a) Maria kauft 14 Riegel und öffnet sie nacheinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie

i) zwei Zauberspiegel findet?
ii) keinen Zauberspiegel findet?
iii) Geben Sie eine Formel an für die Berechnung der Frage: Wie viele Schokoriegel müsste er kaufen, um mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Zauberspiegel zu erhalten.

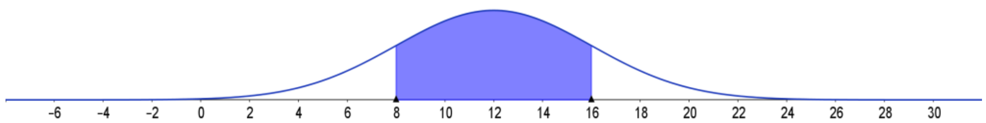
b) Der Pralinenverkauf hat folgende Verkaufszahlen (in Tausend) im letzen Jahr gebracht

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl	23	33	25	30	31	28	20	18	27	33	29	35

− Erstellen Sie ein BOXPLOT dazu

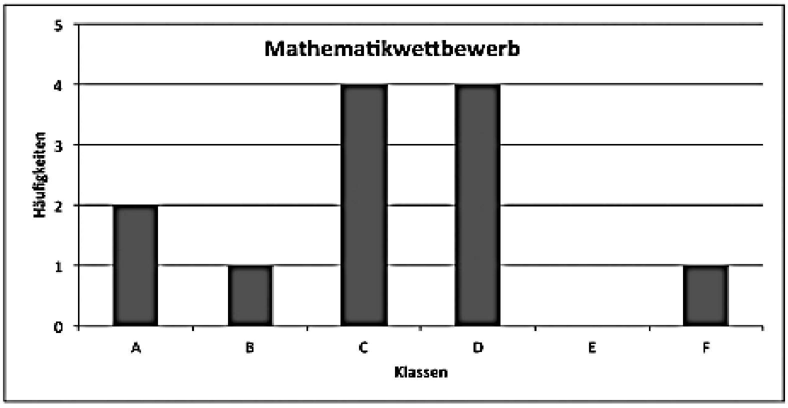
c) Das durchschnittliche Anzhl von Pralinen, die an eine Person verkauft wird, ist 12 mit einer Standardabweichung von 4 Pralinen.

i) Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Person mehr als 20 Pralinen kauft.
ii) Erklären Sie die Bedeutung der schraffierten Fläche der Normalverteilung im Sachzusammenhang



Lösungen:

1) a)



b) Punktezahlen der Mädchen:
– arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
– Median: 58 Punkte

Die Behauptung ist also falsch.

c) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

Spannweite: 75 – 35 = 40.
Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

2) a) i) normalcdf(-10^{99},7.84,8,0.15) = 0,3446
ii) x_1 = invNorm(0.01,8,0.15) = 7,65 cm, x_2 = invNorm(0.99,8,0.15) = 8,35 cm

b) $\overline{x}$=7,95cm , σ = 0,044 cm

c) i) binompdf(10,0.3,4) = 0,2001 (20,01%) ii) binomcdf(10,0.3,3) = 0,3488 (34,88%)

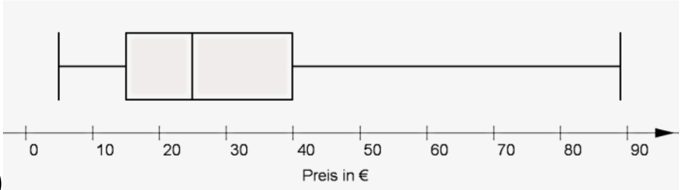
d) Weil die Box sehr viele Schrauben enthält, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Versuch praktisch gleich.

3) a) Aus dem Diagramm kann man entnehmen, dass
- ca. 75% der Bäume einen Stammumfang kleiner als **60 cm** haben.
- alle Bäume einen Stammumfang von höchstens **66 cm** haben.
- von den 120 Bäumen **ca. 30** einen Stammumfang von höchstens 45 cm haben.
- **ca. 60** Bäume einen Stammumfang von 45 cm bis 60 cm haben. (4 P)

b)
- mindestens eine rote Kugel: 1−binompdf(3,8/20,0) = 0,784
- genau eine rote Kugel: binompdf(3,8/20,1) = 0,432
- $(1-8/20)^n = 1-0{,}90$ ➔ solve ➔ mindestens 5 Versuche

c)
- Grafik 2
- normalcdf(3720,10^{99},2200,800) = 0,0287
- zwischen invNorm(0.025,2200,800) = 632 € und invNorm(0.975,2200,800) = 3768 €

4) i) normlcdf(-10^{99},75,80.3) = 4,78 %;
ii) invNorm(0.05,80,3) = 75,1 g bis invNorm(0.95,80,3) = 84,9 g
iii) $\bar{x} = 29{,}135$ €, $\sigma = 19{,}66$ €, $Q_1 = 14{,}95$ €, $\tilde{x} = 24{,}90$ €, $Q_3 = 39{,}90$ €

iv) 

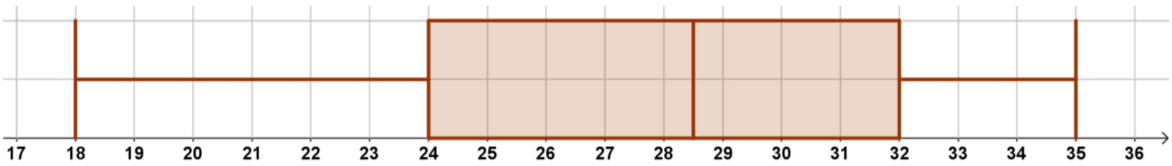
v) Die zwei höchsten Preise sind wesentlich höher als alle anderen. Dadurch wird das arithmetische Mittel größer, auf den Median hat es keinen Einfluss.

5) a) i) $\bar{x}$ = 8,97 σ=0,43
ii) Min = 8,65 Max = 9,9 Med = 8,74

b) i) binompdf(7,0.4,3) = 0,71
ii) binomcdf(7,0.4,1) = 0,71
iii) 1−binomcdf(7,0.4,1) = 0,841
iv) $1-0{,}95 = (1-0{,}4)^n$ ➔ solve ➔ 5,86 ➔ mindestens 6 Spiele sind nötig

c) i) E(X)= n·p = 1500·0,07 = 105 Eier sind durchschnittlich beschädigt
ii) 1−binompdf(1500,0.07,119) = 0,073
oder: normalcdf(120,1500,105,$\sqrt{105 \cdot 0{,}93}$) = 0,0645
iii) invNorm(0.025,105, $\sqrt{105 \cdot 0{,}93}$) = 85,6 ~ 86 Eier minimal
invNorm(0.975,105, $\sqrt{105 \cdot 0{,}93}$) = 124,3 ~ 124 Eier maximal

6) a) i) binmpdf(14,1/7,2) = 0,292
ii) binompdf(14,1/7,0) = 0,116
iii) $1-0{,}90 = (1-1/7)^n$ ➔ solve ➔ 14,9 ➔ mindestens 15 Riegel kaufen

b) 

c) i) normalcdf(20,10^{99}, 12,4) = 0,0227..
ii) Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 8 und 16 Pralinen gekauft werden.